

Concursul regional de matematică „Ioan Aron”

clasa a VI-a

etapa regională - 10 mai 2025

Barem de notare

Notă: Se punctează orice altă soluție corectă, chiar dacă nu este precizată în barem

1. Pe un segment $[AB]$ considerăm punctele C și D astfel încât $AC = BD < \frac{AB}{2}$.

Construim triunghiurile echilaterale ACM și BCN de aceeași parte a dreptei AB .
Demonstrați că triunghiul MDN este echilateral.

Liliana Niculescu, Târgu Mureș

Soluție:

$$\begin{aligned} MA &= DB = MC && 1p \\ \sphericalangle MAD &= \sphericalangle DBN = \sphericalangle MCN = 60^\circ && 1p \\ \xRightarrow{L.U.L} \Delta MAD &\equiv \Delta DBN \equiv \Delta MCN && 2p \\ AD &= BN = CN && 1p \\ \text{De aici, rezultă că } MD &= DN = MN, \text{ deci } \Delta MDN \text{ echilateral} && 2p \end{aligned}$$

2. Determinați numerele întregi x, y, z, t știind că:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2025 \quad \text{și} \quad \frac{x}{3x+5} = \frac{y}{3y+6} = \frac{z}{3z+8} = \frac{4t}{12t+5}.$$

Soluție: A doua relație se poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x} &= \frac{3y+6}{y} = \frac{3z+8}{z} = \frac{12t+5}{4t} \\ 3 + \frac{5}{x} &= 3 + \frac{6}{y} = 3 + \frac{8}{z} = 3 + \frac{5}{4t} && 2p \\ \text{De aici avem } \frac{x}{5} &= \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = \frac{4t}{5} = k && 1p \end{aligned}$$

Din ultima relație obținem că $x = 5k, y = 6k, z = 8k, t = \frac{5k}{4}$

care înlocuite în $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2025$ conduc la $k^2 = 16$, adică $k = -4$ sau $k = 4$ 2p

Pentru $k = -4$ avem $x = -20, y = -24, z = -32, t = -5$ 1p

Pentru $k = 4$ avem $x = 20, y = 24, z = 32, t = 5$ 1p

3. Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctul P .
Demonstrați că diferențele $AP - BP$ și $AP - CP$ au semne opuse sau sunt nule.

Mihai Opincariu, E:16939 G.M.B nr. 6-7-8/2024

Soluție:

Fie M mijlocul lui BC .

Atunci AM este mediana corespunzătoare ipotenuzei și deci $AM = BM = CM$ 1p

Punctul P poate avea pe $[BC]$ diferite poziții, astfel:

- 1) $P = M$. Atunci $AP = BP = CP$, iar $AP - BP = AP - CP = 0$ 2p
- 2) $P \in (BM)$. Atunci în $\triangle AMP$ avem
 $AM < AP + PM \Leftrightarrow BM < AP + PM \Leftrightarrow BP + PM < AP + PM \Leftrightarrow BP < AP \Leftrightarrow AP - BP > 0$.
 Tot în $\triangle AMP$ avem inegalitatea $AP < AM + PM \Leftrightarrow AP < MC + PM \Leftrightarrow AP < PC \Leftrightarrow AP - PC < 0$.
 Așadar, diferențele $AP - BP$ și $AP - CP$ au semne opuse 2p
- 3) $P \in (MC)$. Atunci în $\triangle AMP$ avem
 $AM < AP + PM \Leftrightarrow MC < AP + PM \Leftrightarrow MC + PC < AP + PM \Leftrightarrow PC < AP \Leftrightarrow AP - PC > 0$.
 Tot în $\triangle AMP$ considerăm inegalitatea $AP < AM + PM \Leftrightarrow AP < BM + PM \Leftrightarrow AP < BP \Leftrightarrow AP - BP < 0$.
 Așadar, diferențele $AP - BP$ și $AP - CP$ au semne opuse 2p

În concluzie, diferențele $AP - BP$ și $AP - CP$ au semne opuse sau sunt nule, pentru orice $P \in (BC)$

4. Demonstrați că există un multiplu al lui 1009 care se termină în 2025.

Unguroiu Răzvan-Marius, elev, Arad

Soluție:

Considerăm numerele care se termină în 2025:

$$r_1=2025, r_2=20252025, r_3=202520252025, \dots, r_{1009}=\underbrace{20252025 \dots 2025}_{1009 \text{ ori}}$$

$$(r_k=\underbrace{20252025 \dots 2025}_{k \text{ ori}}, \text{ unde } k \text{ este un număr natural între } 1 \text{ și } 1009) \quad 2p$$

Dacă printre aceste numere se regăsește unul care dă restul 0 la împărțirea cu 1009 atunci problema este rezolvată, un astfel de număr existând.

Presupunem că nu e așa. Atunci resturile sunt din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 1008\}$ 1p

Această mulțime are 1008 elemente, iar noi avem 1009 numere. Din principiul cutiei rezultă că există două numere, r_i și r_j cu $i < j$, $i, j < 1009$ care dau același rest la împărțirea cu 1009 1p

$$\text{Atunci, } r_j - r_i = \underbrace{20252025 \dots 2025}_{j \text{ ori}} - \underbrace{20252025 \dots 2025}_{i \text{ ori}} = \underbrace{20252025 \dots 2025}_{j-i \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{4i \text{ ori}} \quad 1p$$

Astfel $r_j - r_i$ se poate rescrie:

$$r_j - r_i = \underbrace{20252025 \dots 2025}_{j-i \text{ ori}} \cdot 10^{4i} = r_{j-i} \cdot 10^{4i}.$$

Deoarece $(1009, 10^{4i}) = 1$ rezultă că r_{j-i} este divizibil cu 1009.

Deci presupunerea e falsă, deci există un număr care se termină cu 2025 și e divizibil cu 1009 2p