

Concursul regional de matematică „Ioan Aron”**clasa a VII-a****etapa regională - 10 mai 2025****Barem de notare**

Notă: Se punctează orice altă soluție corectă, chiar dacă nu este precizată în barem

1. a) Se consideră pătratul $ABCD$. Notăm M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv DA , iar O un punct interior pătratului. Știind că ariile patruleterelor $AMOQ, BNOM, CPON$ sunt egale cu 16, 20, respectiv 32, să se afle aria patruleterului $DQOP$.

Soluție:

În triunghiul AOB , OM – mediană, deci $A_{OAM} = A_{OBM} = a$ 0,25 p

În triunghiul BOC , ON – mediană, deci $A_{OBN} = A_{OCN} = b$ 0,25 p

În triunghiul COD , OP – mediană, deci $A_{OCP} = A_{ODP} = c$ 0,25 p

În triunghiul DOA , OQ – mediană, deci $A_{ODQ} = A_{OAQ} = d$ 0,25 p

$$A_{AMOQ} = A_{OAM} + A_{OAQ} = a + d = 16 \quad (1) \quad 0,25 \text{ p}$$

$$A_{BNOM} = A_{OBM} + A_{OBN} = a + b = 20 \quad (2) \quad 0,25 \text{ p}$$

$$A_{CPON} = A_{OCN} + A_{OCP} = b + c = 32 \quad (3) \quad 0,25 \text{ p}$$

Adunând membru cu membru egalitățile (1) și (3) obținem

$$a + b + c + d = 48 \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\text{din (2) } a + b = 20, \text{ deci } c + d = 48 - 20 = 28 \quad 0,75 \text{ p}$$

- b) Fie triunghiul ABC în care avem $BC = a$ și $AC = b$. Demonstrați că lungimea bisectoarei unghiului $\sphericalangle ACB$ este mai mică decât media armonică a lungimilor laturilor BC și AC .

(Media armonică a numerelor pozitive x și y este $m_h = \frac{2xy}{x+y}$).

Soluție:

Fie $[CD]$ bisectoarea $\sphericalangle ACB$, $D \in (AB)$.

Construim $DE \parallel BC$, $E \in (AC)$

1p

Atunci $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle CDE$ (alt. int) și cum $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle DCE$

rezultă că $\triangle CDE$ este isoscel și notăm $CE = ED = x$ 1p

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$, deci $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$, de unde $\frac{b}{b-x} = \frac{a}{x}$, deci $x = \frac{ab}{a+b}$ 1p

În triunghiul $\triangle CDE$ avem: $CD < CE + ED = 2x = \frac{2ab}{a+b}$ 1p

2. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$ și punctul D pe latura BC astfel încât semidreapta (AD) este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Notăm cu O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD . Dreptele BO_1 și CO_2 se intersectează în punctul M . Demonstrați că triunghiul MBC este isoscel, iar punctele A, B, C și M sunt conciclice.

Liliana Niculescu, E:16954 G.M.B nr. 6-7-8/2024

Soluție:

Fără a restrânge generalitatea problemei, putem considera $AB < AC$.

Triunghiul ADB este ascuțitunghic și O_1 este în interiorul acestuia 1p

În cercul circumscris $\triangle ADB$, avem:

$$m(\sphericalangle B O_1 D) = m(\widehat{BD}) = 2m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle A) \quad 1p$$

Cum $\triangle B O_1 D$ este isoscel cu baza BD , deducem că

$$m(\sphericalangle O_1 B D) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) \quad (1) \quad 1p$$

Unghiul $\sphericalangle ACD$ este obtuz, deci punctele D și O_2 sunt de o parte și de alta a dreptei AC , prin urmare, în cercul circumscris $\triangle ADC$, avem:

$$m(\sphericalangle D C O_2) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\widehat{DC})) = 90^\circ - m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \triangle MBC$ este isoscel 2p

$$m(\sphericalangle BMC) = 180^\circ - 2(90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)) = m(\sphericalangle A) \Rightarrow ABCM \text{ inscriptibil.}$$

Deci, A, B, C, M conciclice 2p

3. Pe o tablă sunt scrise n cifre de 1 (n număr natural, $n \geq 2$). Un pas constă în alegerea a două numere de pe tablă a, b , ștergerea lor și scrierea pe tablă a numărului $\frac{a+b}{4}$. Procedul se repetă până când pe tablă rămâne scris un singur număr. Arătați că numărul rămas este mai mare sau egal cu $\frac{1}{n}$.

Irina Răzvan, elev, Arad

Soluție:

Fie S_i suma inverselor numerelor scrise pe tablă după pasul i și S_0 suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă 1p

$$S_0 = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1}}_{n \text{ ori}} = n.$$

$$S_i - S_{i-1} = \frac{1}{\frac{a+b}{4}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

unde a și b sunt cele două numere alese la pasul i 1p

$$m_h \leq m_a \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{4} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$
 1p

$$\text{Astfel, } S_i - S_{i-1} = \frac{4}{a+b} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq 0 \text{ pentru orice } i = \overline{1, n-1}. \quad 1p$$

$$\Rightarrow S_{n-1} - S_0 = (S_{n-1} - S_{n-2}) + (S_{n-2} - S_{n-3}) + \dots + (S_1 - S_0) \leq 0 \quad 1p$$

După $n-1$ pași rămâne pe tablă scris un singur număr N 1p

$$\Rightarrow S_{n-1} = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{N} - n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N} \leq n \Rightarrow N \geq \frac{1}{n} \quad 1p$$

4. Determinați numerele naturale x, y astfel încât: $3 \cdot 2^x + 1 = 7^y$.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Pentru $x = 1$ se obține $y = 1$ 1p

Dacă $x \geq 2$, atunci membrul stâng al egalității este de forma $M_4 + 1$. Deci, y este par.

Fie $y = 2n, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $3 \cdot 2^x = 49^n - 1$ 2p

Cum $49^n - 1 = 48 \cdot (1 + 49 + 49^2 + \dots + 49^{n-1})$,

se obține $2^{x-4} = 1 + 49 + 49^2 + \dots + 49^{n-1}$ 2p

Dacă $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, atunci $1 + 49 + 49^2 + \dots + 49^{n-1}$ este impar și prin urmare și 2^{x-4} va fi impar. Așadar, $x = 4$ și $y = 2$ 1p

Dacă $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $3 \cdot 2^x = 2401^k - 1$, ceea ce este imposibil

În concluzie, $(x, y) \in \{(1, 1), (4, 2)\}$. 1p